

La chaîne trophique

Analyse

Dans un écosystème, les espèces en présence interagissent, entre elles et avec leur environnement, et l'effectif de leur population varie dans le temps en fonction de ces interactions. Des modèles mathématiques faisant intervenir des suites ou des fonctions et leurs dérivées permettent de simuler ces évolutions. Les applications sont multiples, de la compréhension des phénomènes d'extinction à l'optimisation des politiques de pêche, en passant par la mise en œuvre de bioréacteurs efficaces.

Pour en savoir plus… tourner la page.



Dynamique des populations et modélisation

Sandrine Charles, maître de conférences, université de Lyon,
laboratoire de Biométrie-Biologie évolutive (CNRS) et
Hubert Charles, maître de conférences, université de Lyon,
INSA de Lyon, laboratoire de Biologie fonctionnelle (INRA).

« Le 12 décembre 1999, 6 h du matin, la mer est forte au large de Penmarc'h (Finistère). Le pétrolier Erika, transportant 37 000 tonnes de fioul lourd, lance un appel de détresse. Il coulera quelques heures plus tard […] : 150 000 oiseaux marins meurent, des phoques, des dauphins, des poissons, les algues et le microplancton sont largement contaminés par les résidus cancérigènes d'hydrocarbures…

C'est tout un écosystème qui vacille en quelques jours. Peut-on optimiser une stratégie de dépollution pour limiter l'impact de la marée noire sur les populations animales ou végétales les plus fragiles ? Quelle a été l'influence à long terme de cette marée noire sur les écosystèmes de la région ? Il est très difficile de répondre à de telles questions sans avoir recours à des modèles de prédiction et de simulation de la dynamique des populations. Ces modèles sont aujourd'hui, comme ceux des prévisions météorologiques, extrêmement complexes au niveau mathématique et informatique ; ils nécessitent de gros moyens de calculs. Cependant, ils sont fondés sur des principes simples, élaborés bien avant l'invention des ordinateurs […].

Modélisation : une question de choix

Quel que soit le modèle choisi, celui-ci reste une représentation simplifiée du monde réel et se fonde sur des hypothèses simplificatrices plus ou moins réalistes, [il] est écrit sous forme d'équations […]. La complexité des modèles mathématiques croît avec la quantité de détails que l'on veut prendre en compte dans la description du processus. Ainsi, certains modèles ne nécessitent guère plus qu'un papier et un crayon pour être appréhendés, tandis que d'autres engendrent parfois plusieurs jours de calcul sur des grappes d'ordinateurs travaillant en parallèle.

La dynamique des populations : du XIIIe siècle à nos jours

L'utilisation de modèles mathématiques en sciences de la Vie a connu un engouement à partir du milieu du XXe siècle. On peut toutefois dater de 1202 le tout premier modèle proposé en dynamique des populations. On le doit à Leonardo Pisano, mathématicien italien plus connu sous le nom de Fibonacci (1178-1250) qui, dans son *Liber abaci*, a tenté de décrire la croissance d'une population de lapins, donnant ainsi naissance à la fameuse suite de Fibonacci. Un bond de plusieurs siècles dans l'histoire nous amène aux travaux du pasteur anglican et économiste britannique Thomas Malthus (1766-1834) qui prédit à cette époque d'inévitables catastrophes démographiques, si les naissances ne sont pas contrôlées dans les populations humaines. […] Plus tard, des modèles concurrents au modèle de Malthus seront proposés […]. Le plus célèbre des modèles de dynamique de deux populations [en interaction] est celui de Lotka-Volterra. Il fut proposé indépendamment par Alfred James Lotka (mathématicien et statisticien américain) en 1925 et Voti Volterra (mathématicien et physicien italien) en 1926, afin d'expliquer l'évolution par oscillations du niveau des pêches de sardines et de requins dans la mer Adriatique depuis 1827. La richesse des mathématiques offre d'autres approches de la dynamique des populations, qui prennent en compte [la] structuration interne de la population en classes (classes d'âge et de taille, stades de développement…). L'épidémiologie utilise un découpage analogue […] pour comprendre comment une maladie peut soudainement se développer puis disparaître sans s'être étendue à toute la communauté, ce que l'on a observé dans d'innombrables épidémies au cours des siècles.

Modéliser pour prédire et protéger l'environnement

Les activités humaines induisent de nombreuses perturbations sur les écosystèmes […]. Il devient indispensable d'acquérir une meilleure connaissance de tous les facteurs susceptibles d'induire des effets perturbateurs sur les organismes vivants et de leurs effets sur les différents niveaux d'organisation biologique (individu, population, communauté) […]. Le développement de modèles mathématiques à visée prédictive apparaît donc nécessaire pour une meilleure gestion de l'environnement dans la perspective d'un développement durable. »

Source : *DocSciences* n° 8, SCÉRÉN

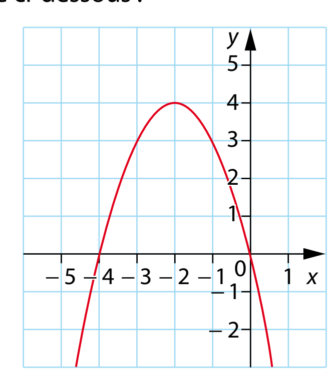
CHAPITRE 1

Second degré

Pour reprendre contact

1 Fonction du second degré

1. Une fonction de la forme $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ est représentée ci-dessous :



a. Comment s'appelle cette courbe ?

b. Quelles sont les coordonnées du sommet de la courbe ?

c. Quelles sont les solutions de l'équation $f(x) = 3$? De l'inéquation $f(x) \leqslant 3$?

d. Quel est le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x ?

2. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

2 Développer, factoriser

Recopier et compléter :

a. $(3x + \dots)^2 = \dots + \dots + 4$

b. $x^2 + 6x + \dots = (x + \dots)^2$

c. $x^2 - 8x + \dots = (x - \dots)^2$

d. $x^2 + 3x + \dots = (x + \dots)^2$

3 Choisir la bonne forme

Voici trois expressions d'une même fonction g définie sur $\mathbb{R}$:

$g(x) = 2(x + 4)^2 - 18$

$g(x) = 2(x + 1)(x + 7)$

$g(x) = 2x^2 + 16x + 14$

En choisissant l'expression la mieux adaptée, répondre aux questions suivantes :

1. La fonction g admet-elle un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de x ?

2. Déterminer la (ou les) solution(s) de l'équation $g(x) = 0$.

3. Déterminer la (ou les) solution(s) de l'équation $g(x) = 14$.

4. Déterminer la (ou les) solution(s) de l'équation $g(x) = 54$.

4 Avec les tableaux de signes

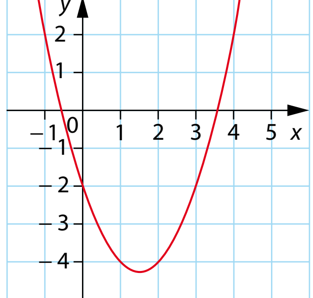
Recopier et compléter le tableau suivant :

x	$-\infty$ 2	3	$+\infty$
signe de $2x - 4$	0		
signe de $3 - x$		0	
signe du produit $(2x - 4)(3 - x)$			

1 Où se trouve le sommet ?

OBJECTIF
Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole à partir de son équation.

Voici la courbe représentative de la fonction f polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x - 2$.



1. Résoudre l'équation $f(x) = -2$.

2. En déduire une équation de l'axe de symétrie de cette parabole, puis les coordonnées du sommet S de la parabole.

3. En reprenant la même démarche, déterminer l'abscisse x_S du sommet S de la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

Pour aller plus loin

Montrer que, pour toute fonction dont l'expression est $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, $f(0) = f(x_S) + \frac{b^2}{4a}$.

En déduire, selon le signe de a, si f admet un maximum ou un minimum en x_S.

2 Forme canonique et équation $f(x) = 0$

OBJECTIF
Faire le lien entre la forme canonique et le sommet de la parabole et résoudre une équation de degré 2.

VOCABULAIRE
Pour un trinôme du second degré, l'écriture « $a(x-\alpha)^2 + \beta$ » est dite **forme canonique**.

A. Aspect graphique

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x - 1)^2 - 4$.

a. Justifier que g admet un minimum en 1.

b. Donner les coordonnées du sommet S de la courbe $\mathscr{C}_g$ représentant g.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'expression est $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$ et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

a. Déterminer les coordonnées x_S et y_S du sommet S de $\mathscr{C}_f$.

b. Conjecturer les valeurs des réels α et β tels que $f(x) = 2(x - \alpha)^2 + \beta$.
Prouver votre conjecture.

c. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

B. Aspect algébrique

1. On considère la fonction $h : x \mapsto 4x^2 - 24x + 27$ définie sur $\mathbb{R}$.

a. Donner une autre écriture de $h(x)$ sous la forme $4(\ldots) + 27$.

b. Recopier et compléter : $x^2 - 6x + \ldots = (x - \ldots)^2$ d'où $x^2 - 6x = \ldots$.

c. En remplaçant $x^2 - 6x$ par l'expression trouvée à la question précédente, déterminer une écriture de $h(x)$ sous la forme $4(x - \ldots)^2 + \ldots$.

d. Résoudre l'équation $h(x) = 0$.

2. En suivant la même démarche, mettre $k(x)$ sous forme canonique, puis résoudre l'équation $k(x) = 0$:

a. $k(x) = 2x^2 + 4x - 4$ **b.** $k(x) = x^2 + 5x + 5$ **c.** $k(x) = 4x^2 - 4x + 1$

3 Le discriminant

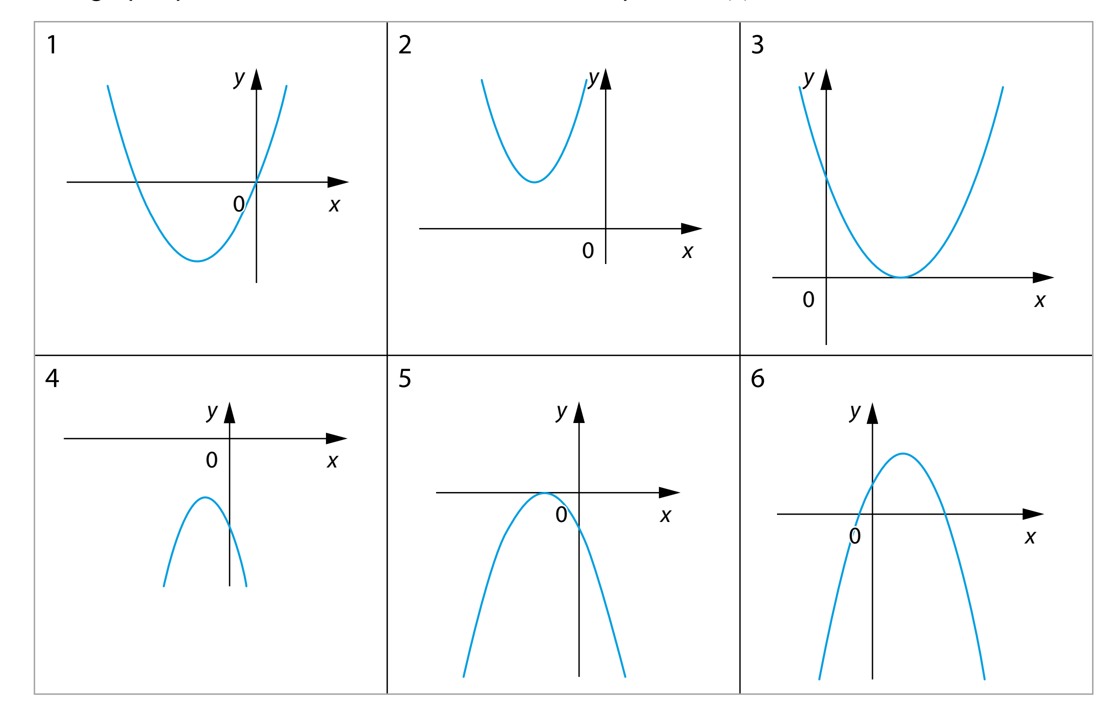
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b, c réels et $a \neq 0$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f et $S(x_S\ ;\ y_S)$ son sommet.

1. Donner x_S en fonction de a et b et calculer $y_S = f(x_S)$ en fonction de a, b et c.

2. Vérifier que $y_S = -\dfrac{\Delta}{4a}$ où $\Delta = b^2 - 4ac$.

LOGIQUE
On met ici en œuvre une disjonction de cas.

3. Dans chacun des cas suivants :
• lire graphiquement le signe de y_S et de a. En déduire celui de Δ.
• lire graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.



4. Émettre une conjecture sur le nombre de solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ en fonction de Δ.
Pourquoi appelle-t-on Δ le « discriminant » de $ax^2 + bx + c$?

4 Le signe du trinôme de degré 2

OBJECTIF
Revoir une étude de signe utilisant un tableau de signes.
Conjecturer graphiquement la propriété générale du signe du trinôme.

1. Un exemple
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x + 5$ pour tout x réel.

a. À la calculatrice, conjecturer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

b. Mettre $f(x)$ sous forme canonique et en déduire une factorisation de $f(x)$.

c. À l'aide d'un tableau de signes, déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

2. Une conjecture dans le cas général
Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b, c réels et $a \neq 0$.

a. Lire graphiquement le signe de $f(x)$ et celui de a pour chacune des six courbes représentatives de f données dans la question **3** de l'activité **3**.

b. Si le discriminant Δ de $f(x)$ est négatif ou nul, quelle conjecture peut-on émettre sur les signes de $f(x)$ et de a ? Et si $\Delta > 0$?

1 Fonction polynôme de degré 2

VOCABULAIRE

On dit aussi que f est une fonction trinôme de degré 2 **ou** du second degré car son expression comporte trois termes.

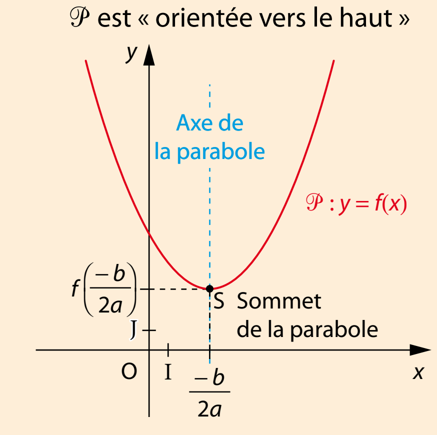
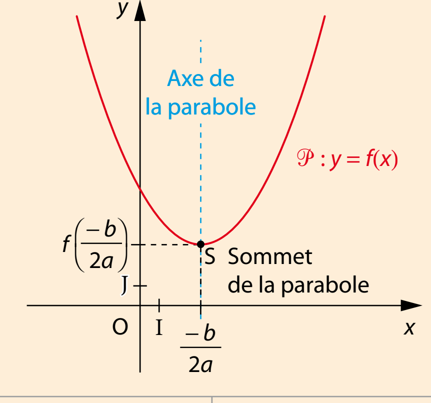
Propriété 1

Soit la fonction f polynôme de degré 2, $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ (a, b, c réels, $a \neq 0$).

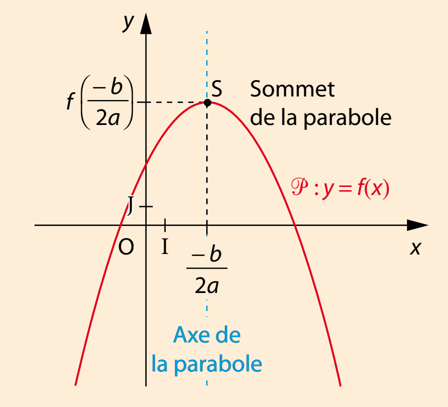
Elle est représentée par une parabole $\mathcal{P}$ dont le sommet S a pour abscisse $-\dfrac{b}{2a}$.

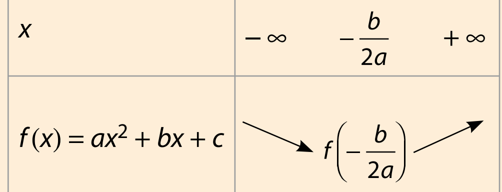
Dans un repère orthogonal, la parabole $\mathcal{P}$ admet un axe de symétrie.

Si $a > 0$
$\mathcal{P}$ est « orientée vers le haut »

Si $a < 0$
$\mathcal{P}$ est « orientée vers le bas »





x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	↘	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	↗

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	↗	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	↘

Démonstrations

Propriété 1

Soit $x < x'$. On compare $f(x)$ et $f(x')$ en étudiant le signe de leur différence :

$f(x') - f(x) = a(x'^2 - x^2) + b(x' - x) = (x' - x)\,(a(x' + x) + b) = a(x' - x)\,(x' + x + \dfrac{b}{a})$ car $a \neq 0$.

Par hypothèse, $x < x'$ donc $x' - x > 0$ et par suite, $f(x') - f(x)$ a même signe que $a(x' + x + \dfrac{b}{a})$.

- Sens de variation de f sur $]-\infty\,; -\dfrac{b}{2a}]$:

$x < x' \leqslant -\dfrac{b}{2a}$ donc $x' + x < -\dfrac{b}{a}$ et par suite $x' + x + \dfrac{b}{a} < 0$. On examine donc deux cas :

• si $a < 0$, $f(x') - f(x) > 0$ soit $f(x) < f(x')$ et f est strictement croissante sur $]-\infty\,; -\dfrac{b}{2a}]$;

• si $a > 0$, $f(x') - f(x) < 0$ soit $f(x) > f(x')$ et f est strictement décroissante sur $]-\infty\,; -\dfrac{b}{2a}]$.

- Sens de variation de f sur $[-\dfrac{b}{2a}\,; +\infty[$:

$-\dfrac{b}{2a} \leq x < x'$ donc $-\dfrac{b}{a} < x' + x$ et de ce fait $0 < x' + x + \dfrac{b}{a}$.

• Si $a < 0$, on en déduit que $f(x') - f(x) < 0$ puis que f est strictement décroissante sur $[-\dfrac{b}{2a}\,; +\infty[$.

• Si $a > 0$, $f(x') - f(x) > 0$ puis que f est strictement croissante sur $[-\dfrac{b}{2a}\,; +\infty[$.



1 Tracer une parabole

Énoncé

Soit la fonction $g : x \mapsto 3x^2 - 4x + 1$ sur $\mathbb{R}$. Tracer la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = g(x)$.

Solution

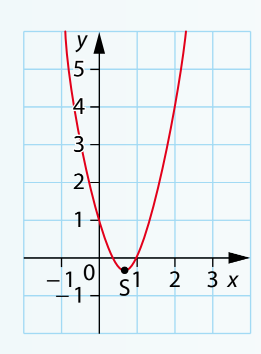
g est une fonction trinôme du second degré dont les coefficients sont $a = 3$, $b = -4$ et $c = 1$.
Comme $a > 0$, la parabole est « tournée vers le haut ».
Le sommet S de la parabole $\mathcal{P}$ a pour abscisse :

$$x_S = -\frac{-4}{2 \times 3} = \frac{2}{3}$$

et pour ordonnée :

$$y_S = g\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3}.$$

On précise quelques points dans un tableau de valeurs, puis on trace la courbe.



MÉTHODE

Pour tracer une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$:
- on identifie a, b et c ;
- on regarde le signe de a pour savoir si la parabole est « vers le haut » ou « vers le bas » ;
- on détermine l'abscisse du sommet par la formule $-\frac{b}{2a}$ puis on calcule son ordonnée.

Voir exercices 17, 18

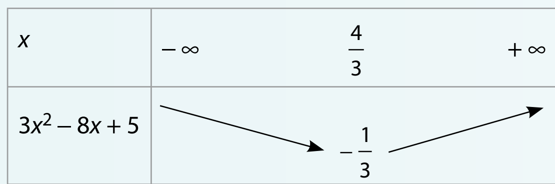
2 Variations d'une fonction polynôme de degré 2

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 8x + 5$. Dresser le tableau de variation de la fonction f. Contrôler graphiquement les résultats à l'aide de la calculatrice.

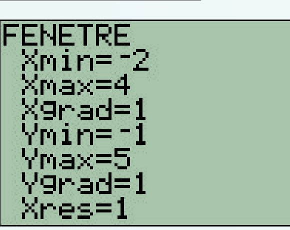
Solution

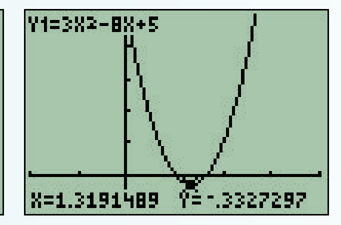
f est une fonction polynôme de degré 2 dont le coefficient du terme en x^2 est 3.
La parabole représentative de la fonction f est donc « tournée vers le haut ».
Le sommet S de cette parabole a pour abscisse
$x_S = -\frac{-8}{2 \times 3} = \frac{4}{3}$ et pour ordonnée $y_S = f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{1}{3}$.
On obtient ainsi le tableau de variation suivant :



x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$3x^2 - 8x + 5$	↘	$-\frac{1}{3}$	↗

On entre la fonction f sur la calculatrice et on choisit une fenêtre adaptée aux coordonnées trouvées pour S.
L'outil **Trace** permet de contrôler les coordonnées du sommet.





MÉTHODE

Pour obtenir le tableau de variation d'une fonction f, fonction polynôme de degré 2 :
- on regarde le signe de a pour connaître l'allure de la parabole donc le sens de variation de f ;
- on détermine l'abscisse du sommet par la formule $-\frac{b}{2a}$, puis on calcule son ordonnée $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

Voir exercices 26, 27, 28

2 Forme canonique et équation $ax^2 + bx + c = 0$

Propriété 2

Pour tout trinôme $ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, on peut trouver deux réels α et β tels que, pour tout x réel, $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$.
L'écriture $a(x - \alpha)^2 + \beta$ est appelée **forme canonique** du trinôme.

Dans la forme canonique ci-dessus, les coefficients α et β sont l'abscisse et l'ordonnée du sommet S de la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$.

VOCABULAIRE

Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont aussi appelées **racines** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Définition et propriété 3

On considère le trinôme $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

	L'équation $ax^2 + bx + c = 0$	Factorisation de $ax^2 + bx + c$
Si $\Delta > 0$	a deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
Si $\Delta = 0$	a une unique solution : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$
Si $\Delta < 0$	n'a pas de solution réelle	

Note
Si $\Delta = 0$, on a $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)(x - x_0)$.
On dit que x_0 est une racine double de $ax^2 + bx + c$ puisqu'elle compte « double » dans la factorisation.

Démonstrations

Propriété 2

Comme $a \neq 0$, $ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x\right] + c$. Or $x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$.

D'où $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$ soit

$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$ **(1)**. Il suffit de poser $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$.

Propriété 3

De l'égalité **(1)** ci-dessus on déduit que $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ avec $\Delta = b^2 - 4ac$.

- 1er cas : si $\Delta < 0$ alors $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$ et l'équation n'a pas de solution.
- 2e cas : si $\Delta = 0$ alors $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$.

Par l'égalité **(1)**, on a $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = a(x - x_0)^2$ avec $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

- 3e cas : si $\Delta > 0$ alors $\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ et $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$.

Ceci équivaut à : $x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ d'où les solutions annoncées.

Par l'égalité **(1)**, on a $ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right) = a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

d'où $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

3 Mettre sous forme canonique et factoriser

Énoncé

1. Mettre $g(x) = 5x^2 - 9x + 4$ sous forme canonique.

2. Factoriser $g(x)$.

Solution

1. • On met 5, le coefficient de x^2, en facteur dans $5x^2 - 9x$.

On a alors $g(x) = 5\left(x^2 - \frac{9}{5}x\right) + 4$.

• On remarque que $x^2 - \frac{9}{5}x + \frac{81}{100} = \left(x - \frac{9}{10}\right)^2$.

On a donc $g(x) = 5\left[\left(x - \frac{9}{10}\right)^2 - \frac{81}{100}\right] + 4$.

• On développe partiellement pour obtenir la forme canonique de $g(x)$:

$$g(x) = 5\left(x - \frac{9}{10}\right)^2 - \frac{5}{100}$$

2. Solution 1 : $g(x) = 5\left[\left(x - \frac{9}{10}\right)^2 - \frac{1}{100}\right]$

donc $g(x) = 5\left(x - \frac{9}{10} - \frac{1}{10}\right)\left(x - \frac{9}{10} + \frac{1}{10}\right) = 5(x-1)\left(x - \frac{4}{5}\right)$.

Solution 2 : on résout $g(x) = 0$ (propriété **3**). On trouve deux solutions :

$x_1 = \frac{4}{5}$ et $x_2 = 1$ donc $g(x) = 5\left(x - \frac{4}{5}\right)(x-1)$.

MÉTHODE

Pour mettre $ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) sous forme canonique :
- on met le coefficient de x^2 en facteur dans $ax^2 + bx$;
- on transforme $x^2 + \frac{b}{a}x$: c'est le début de la forme développée de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ (identité remarquable) ;
- on développe partiellement.

Voir exercices 31, 32, 34

4 Résoudre des équations de degré 2

Énoncé

Résoudre les équations suivantes :

a. $-x^2 + 2x - 5 = 0$ **b.** $5x^2 + 4x - 1 = 0$ **c.** $3x^2 - 15 = 0$ **d.** $4x^2 - 3x = 0$

Solution

a. C'est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = -1$, $b = 2$ et $c = -5$.
On calcule le discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-1) \times (-5) = -16$.
$\Delta < 0$ donc l'équation $-x^2 + 2x - 5 = 0$ n'a pas de solution.

b. C'est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$
avec $a = 5$, $b = 4$ et $c = -1$.
On calcule le discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 5 \times (-1) = 36$.
$\Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - \sqrt{36}}{2 \times 5} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + \sqrt{36}}{2 \times 5} = \frac{1}{5}.$$

c. $3x^2 - 15 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$.

d. $4x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(4x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{3}{4}$.

Conseils

• Pour résoudre une équation de degré 2, on ne se lance pas tête baissée dans le calcul du discriminant !
Quand il manque le terme en x ou le terme constant, on n'a pas besoin du discriminant.

• On contrôle graphiquement les résultats à l'aide de la calculatrice : les solutions de $ax^2 + bx + c = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{P} : y = ax^2 + bx + c$ avec l'axe des abscisses.

Voir exercices 35 à 38

3 Signe d'un trinôme de degré 2

Propriété 4

Soit le trinôme $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et Δ son discriminant.

- Si $\Delta < 0$, le trinôme a même signe que a pour tout réel x.
- Si $\Delta = 0$, le trinôme a même signe que a pour tout réel x et s'annule en $-\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, le trinôme s'annule en deux réels distincts x_1 et x_2. Si $x_1 < x_2$, le tableau de signes du trinôme est :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de $ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe opposé à celui de a	0	signe de a	

On retient souvent cette propriété sous la forme condensée suivante :

« $ax^2 + bx + c$ est du signe de a sauf entre ses racines s'il y en a. »

On peut aussi retrouver graphiquement le signe de $ax^2 + bx + c$ en s'aidant de l'allure de la parabole parmi les 6 cas possibles, suivant le signe de a et de Δ :

	Si $\Delta < 0$ aucune racine.	**Si $\Delta = 0$** une seule racine.	**Si $\Delta > 0$** deux racines x_1 et x_2.
Si $a > 0$, la parabole « est tournée vers le haut ».			
Si $a < 0$, la parabole « est tournée vers le bas ».			

Démonstrations

Propriété 4

- Si $\Delta < 0$, dans la démonstration de la propriété **3** page 26, on a démontré l'égalité :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}\right).$$

Comme $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ et $-\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$, on en déduit que $ax^2 + bx + c$ a le signe de a.

- Si $\Delta < 0$, on a $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$ d'où le résultat annoncé.
- Si $\Delta > 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Un tableau de signes amène au résultat annoncé.

5 Étudier le signe d'un trinôme de degré 2

Énoncé

Soit $k(x) = -x^2 - 3x + 6$ une fonction trinôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$.
Résoudre l'inéquation $k(x) < 0$.

Solution

1. Comparer le trinôme $k(x)$ à 0 revient à étudier son signe.
On cherche les racines du trinôme $-x^2 - 3x + 6$.
On calcule le discriminant $\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-1) \times (6) = 33$.
$\Delta > 0$, donc l'équation $-x^2 - 3x + 6 = 0$ admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-\sqrt{33}}{2\times(-1)} = \frac{-3+\sqrt{33}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{33}}{2}$$

avec $x_1 > x_2$.
Le coefficient de x^2 dans $-x^2 - 3x + 6$ étant négatif,
on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
signe de $-x^2 - 3x + 6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $k(x) < 0$ est donc :

$$\left]-\infty \,;\, \frac{-3-\sqrt{33}}{2}\right[\cup \left]\frac{-3+\sqrt{33}}{2} \,;\, +\infty\right[.$$

MÉTHODE

Pour déterminer le signe d'un trinôme de degré 2, il faut commencer par déterminer ses racines s'il en a.

Conseils

- Bien ranger x_1 et x_2 dans l'ordre croissant.
- Penser à contrôler le tableau de signe d'un trinôme de degré 2 par l'allure de la parabole.

Voir exercices 48, 49

6 Résoudre une inéquation de degré 2

Énoncé

1. Résoudre l'inéquation $x^2 + 2x + 3 > x + 2$.

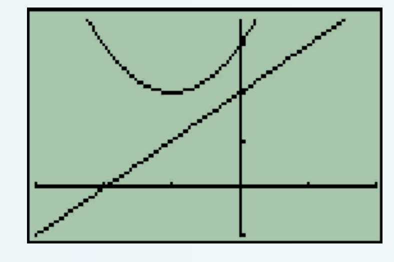
2. Contrôler graphiquement le résultat à la calculatrice.

Solution

1. $x^2 + 2x + 3 > x + 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 - (x + 2) > 0$
$\Leftrightarrow x^2 + x + 1 > 0$

$x^2 + x + 1$ est un trinôme de degré 2.
On cherche les racines éventuelles du trinôme pour étudier son signe : $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$.
$\Delta < 0$, donc le trinôme n'a pas de racine. Il est donc toujours du signe du coefficient de x^2, c'est-à-dire toujours positif.
On a donc, pour tout x réel, $x^2 + x + 1 > 0$.
C'est-à-dire $x^2 + 2x + 3 > x + 2$ pour tout x réel.

2. Soit $f(x) = x^2 + 2x + 3$ et $g(x) = x + 2$.
Dire que $f(x) > g(x)$ pour tout x réel, c'est dire que la parabole représentant f est toujours au-dessus de la droite représentant g.



MÉTHODE

Pour résoudre une inéquation de degré 2,
- on rassemble tous les termes dans un même membre ;
- on est alors amené à comparer un trinôme de degré 2 avec 0 c'est-à-dire à étudier son signe ;
- on contrôle graphiquement à la calculatrice.

Voir exercices 51, 53



1 Algorithmes



OBJECTIF Reprendre contact avec des algorithmes écrits en langue naturelle.
Valider une affirmation. Interpréter des expressions algébriques.

Avec leur calculatrice, Jean-Paul fait fonctionner le programme de calcul A et Louis le programme de calcul B.

Programme A	Programme B
Choisir un nombre.	Choisir un nombre.
Le multiplier par 3.	Lui ajouter $\frac{1}{3}$.
Ajouter 2 au résultat obtenu.	Élever le résultat au carré.
Multiplier par le nombre de départ.	Multiplier par 3.
Soustraire 4 au résultat.	Soustraire $\frac{13}{3}$ au résultat.

1. Qu'obtient-on pour les nombres 4, – 2 et 7 avec ces deux programmes ?

2. Après de multiples essais, Jean-Paul affirme qu'il ne peut pas obtenir moins de – 4 avec le programme A.
Louis affirme quant à lui que le minimum qu'il puisse obtenir avec le programme B est $-\frac{13}{3}$.
Leurs affirmations sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.


Pour aller plus loin
Quelle(s) question(s) peut-on se poser sur ces deux programmes de calcul ? Y répondre.

2 Tout est mélangé !



OBJECTIF Relier algébrique et graphique.

Ce travail est à faire sans calculatrice ni logiciel.
On a représenté ci-dessous, dans des repères orthogonaux, trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ d'équations :

$\mathscr{C}_1 : y = -(x+2)^2 + 3$; $\mathscr{C}_2 : y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$; $\mathscr{C}_3 : y = 4(x-1)(x+2)$.

Comment retrouver les graduations du repère pour chaque graphique ?
Expliquer votre démarche.

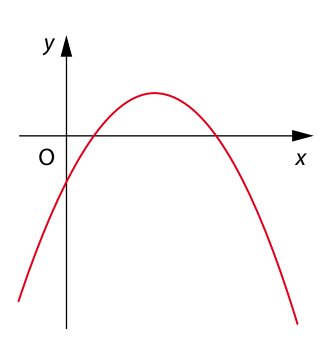


Figure a

Figure b

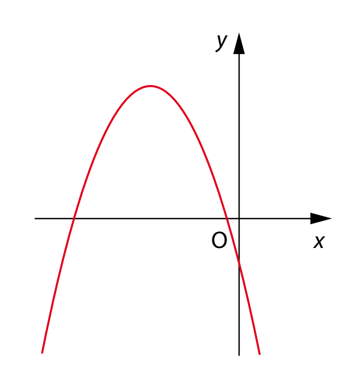


Figure c



3 Un ancien algorithme





OBJECTIF Étudier un ancien algorithme de résolution d'une équation de degré 2.

Au début du IXe siècle, le mathématicien Al-Khwārizmī propose dans son traité *Kitab al - jabr wa - l - muqabâlah* différents algorithmes de résolution d'équations de degré 1 ou 2.



Règle

La règle est que tu divises les racines en deux moitiés, ici on obtient cinq, que tu multiplies par lui-même, on a 25, que tu ajoutes à 39 et on obtient 64. Tu prends la racine qui est 8, tu en retranches la moitié du nombre des racines qui est 5, il en vient 3 qui est la racine du carré que tu cherches, le carré est 9.

1. Pour résoudre l'équation

« Que le carré et dix racines égalent trente neuf unités »

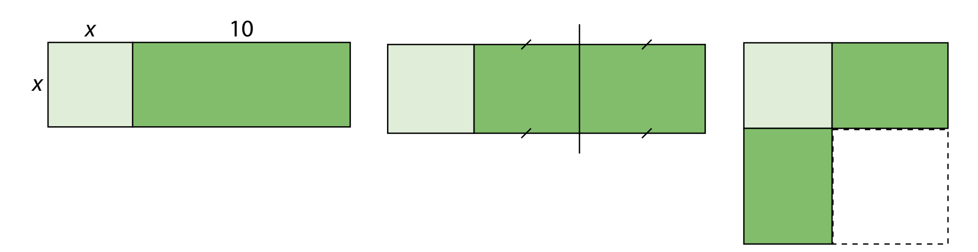
c'est-à-dire, avec notre notation symbolique actuelle,

$$x^2 + 10x = 39$$

Al-Khwārizmī donne la règle ci-contre.
Quelle solution donne cet algorithme ? Vérifier qu'elle est bien solution de l'équation proposée.

2. Une interprétation géométrique

Reproduire à main levée les figures ci-dessous et indiquer les aires des différentes parties afin d'expliquer pourquoi l'algorithme permet bien de trouver une solution de l'équation.



3. Appliquer cet algorithme pour résoudre l'équation $x^2 + 8x = 84$.

4. a. Appliquer cet algorithme pour résoudre l'équation $x^2 + ax = b$, où a et b sont deux nombres positifs.

b. Résoudre cette équation avec les outils actuels.

c. Commenter ces résultats.

Point histoire



Au début du IXe siècle, Al-Khwārizmī, astronome et mathématicien de langue arabe, installé à Bagdad, écrit ce qui est considéré comme le premier traité d'algèbre. Il répond ainsi à une demande du Calife de fournir un ensemble d'outils pour résoudre des problèmes de la vie quotidienne, par exemple des partages d'héritages. Mais Al-Khwārizmī va plus loin en donnant ces outils selon une construction théorique. Il présente les outils de l'algèbre que sont les nombres, l'inconnue et sa racine, et les équations ; il classifie les équations du 1er et 2nd degré avant d'en donner des algorithmes de résolution qu'il justifie de façon géométrique ; il en donne ensuite des applications. Ces méthodes algébriques se répandront peu à peu en Europe. Elles s'appuient sur deux opérations : « *al – jabr wa – l – muqabâlah* ». *Al-jabr* donnera le terme « algèbre » et c'est du nom Al-Khwārizmī que vient celui d'« algorithme ».



Pour en savoir plus

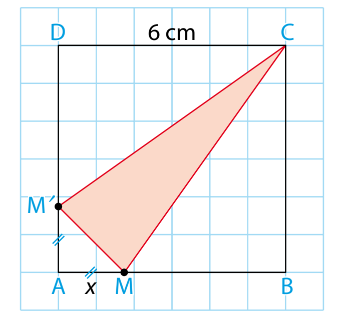
Écouter M. Djebbar à l'adresse : www.math.ens.fr/culturemath/video/Djebbar/index.html



4 Problème d'aire

OBJECTIF Résoudre un problème à l'aide d'une fonction trinôme de degré 2.

Problème étudié



ABCD est un carré de côté 6. Le point M appartient à [AB].
Le point M′ de [AD] est tel que AM′ = AM.
On veut déterminer la (ou les) position(s) de M et M′ telle(s) que l'aire du triangle CMM′ soit supérieure au quart de celle du carré ABCD

On note x la longueur AM exprimée en cm et $\mathscr{A}(x)$ l'aire de CMM′ exprimée en cm^2.

1. À quel intervalle appartient x ? Exprimer $\mathscr{A}(x)$ en fonction de x.

2. Dresser le tableau de variation de la fonction $\mathscr{A}$.

3. À l'aide de la calculatrice, déterminer si l'on peut trouver x tel que :
a. $\mathscr{A}(x) = 9$ **b.** $\mathscr{A}(x) = 18$

4. Retrouver ces résultats par le calcul.

5. Pour quelles valeurs de x, l'aire du triangle CMM′est-elle supérieure au quart de celle du carré ?




5 Cordes de paraboles

@ TICE

OBJECTIF Étudier une propriété géométrique des milieux de cordes parallèles d'une parabole.
Amener progressivement à résoudre une équation de degré 2 avec paramètres.

On considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = \frac{1}{4}x^2$, son sommet S et le point C de $\mathscr{P}$ d'abscisse 2.

A Construction d'une figure dynamique

1. Donner les coordonnées des points S et C.

2. Construire la parabole $\mathscr{P}$ sur un logiciel de géométrie.
Construire le segment [SC].

> **Aide GeoGebra**
> Entrer dans la zone de saisie :
> Saisie: y=1/4*x^2

3. a. Placer un point A de $\mathscr{P}$ puis construire le point B de $\mathscr{P}$ tel que (AB) soit parallèle à (SC).
b. Construire les milieux des segments [AB] et [SC].

4. Quelle conjecture peut-on émettre sur les milieux des segments [AB] ?
On pourra activer la trace du milieu de [AB] puis déplacer A.

> Clic droit sur le milieu de [AB] puis sélectionner *Trace activée*.

Appeler le professeur pour lui soumettre votre travail.

B Démonstration

1. Dans un cas particulier
On considère le point A d'abscisse – 4 qui appartient à la parabole $\mathscr{P}$.
a. Déterminer des équations des droites (SC) et (AB).
b. Quelle équation doit vérifier l'abscisse du point d'intersection de (AB) et de $\mathscr{P}$? Résoudre cette équation.
c. Démontrer la conjecture émise dans la partie A.

Appeler le professeur pour lui soumettre votre travail.

2. Dans le cas général

Soit A le point de $\mathcal{P}$ d'abscisse a.

a. En reprenant la démarche précédente, démontrer que l'abscisse de B est solution de l'équation $x^2 - 2x + 2a - a^2 = 0$.

b. En mettant $x^2 - 2x + 2a - a^2$ sous forme canonique, déterminer l'abscisse de B puis conclure.

Pour aller plus loin

On considère dorénavant les cordes [AB] de $\mathcal{P}$ qui sont parallèles à la droite d'équation $y = mx$, où m est un réel donné. À l'aide du logiciel, conjecturer une équation de la droite à laquelle semble appartenir les milieux des cordes, puis démontrer cette conjecture.



6 Construction à la règle



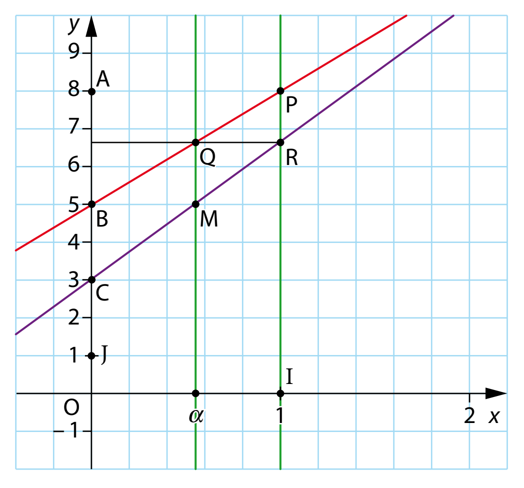




On choisit trois nombres réels a, b et c avec $a \neq 0$.
Dans le repère (O, I, J) orthogonal, on place les points C(0 ; c), B(0 ; $c + b$), A(0 ; $a + b + c$), et P(1 ; $a + b + c$).
On construit la droite (PB).

On choisit un nombre α et on place le point Q de la droite (PB) qui a pour abscisse α.
On construit alors le point R d'abscisse 1 et de même ordonnée que Q.
On trace la droite (CR) et on construit le point M de (CR) qui a pour abscisse α.
Réaliser la construction sur un logiciel de géométrie avec a, b et c variables.
Quelle est la courbe décrite par M quand α décrit $\mathbb{R}$?

D'après *L'algèbre mode d'emploi*, G. Charrière.





7 Étudier l'évolution d'une population

OBJECTIF Modéliser en traduisant algébriquement des questions concrètes.



Une coccinelle à l'état larvaire ou adulte se nourrit de pucerons. Les coccinelles sont donc parfois utilisées dans la lutte biologique contre les pucerons.
Ayant observé la population de coccinelles dans un jardin pendant plusieurs années, on a constaté que si x désigne le nombre des centaines de coccinelles présentes une année avec $0 \leqslant x \leqslant 1$, le nombre de coccinelles dans ce même jardin l'année suivante est $f(x) = 2{,}8x(1 - x)$.

1. Dresser le tableau de variation de f sur [0 ; 1].

2. Tracer la courbe $\mathcal{P}$ représentative de f sur [0 ; 1] dans un repère orthonormé du plan.

3. En 2010, on dénombre 10 coccinelles, déterminer par lecture graphique le nombre de coccinelles en 2011 puis en 2012. Contrôler ces résultats par le calcul.

4. Déterminer le nombre de coccinelles tel que la population reste stable l'année suivante.

5. Combien doit-on avoir de coccinelles pour en avoir au moins 20 de plus l'année suivante ?

Exercices

Sans crayon, sans calculatrice

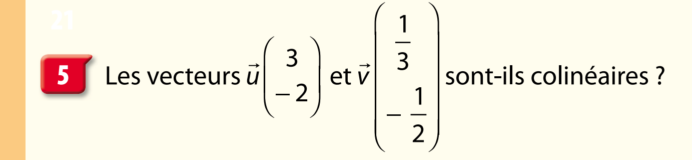
Le plan est muni d'un repère orthogonal.

1 Le point C(2 ; 7) appartient-il à la droite d'équation $y = -3x + 13$?

2 Quelle est l'ordonnée du point d'abscisse 2 qui appartient à la droite d'équation $y = -x + 5$?

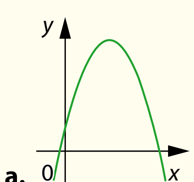
3 Quelle est l'abscisse du point d'ordonnée -2 qui appartient à la droite d'équation $y = -x + 5$?

4 Dans un repère orthonormé, on donne :
A(2 ; 4) et B(-5 ; 6).
Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

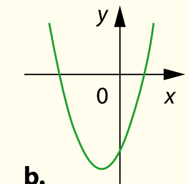


5 Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

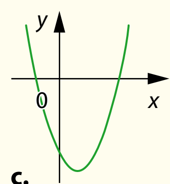
6 Quel graphique peut correspondre à la parabole d'équation $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 8$?



a.

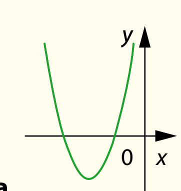


b.

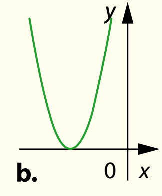


c.

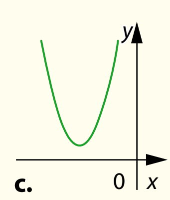
7 Quel graphique peut correspondre à la parabole d'équation $y = \frac{1}{4}x^2 + 7x + 39$?



a.



b.



c.

8 Calculer le discriminant de $4x^2 + 5x - \frac{1}{8}$.

9 Déterminer le nombre de solutions de l'équation $7x^2 - 2x + 12 = 0$.

10 1 est-il solution de $25x^2 - 23x - 2 = 0$?

11 Compléter : $x^2 - 6x = (x - 3)^2 - \ldots$

12 Compléter : $(x - \ldots)(x + 3) = x^2 + \ldots x - 6$.

Entraînement

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Trinôme de degré 2 et parabole

13 Les expressions suivantes sont-elles des trinômes de degré 2 ? Si oui, donner leurs coefficients.

a. $2x^2 - 3x - 4$ **b.** $3x - 9$
c. $(x - 4)(3x + 2)$ **d.** $4x^2 - 5$

14 Même énoncé que l'exercice **13**.

a. $2(x - 3)^2 + 7$ **b.** $9x^2 - 11x$
c. $\dfrac{x^2 - 5x + 8}{2}$ **d.** $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$

15 Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole d'équation :

a. $y = x^2 - 4x + 5$ **b.** $y = -(x + 4)(x - 2)$
c. $y = 3x^2 - 4$ **d.** $y = -x^2 + x$

Contrôler les résultats obtenus à la calculatrice.

Aide : exercice résolu 1

16 Dans chacun des cas suivants, déterminer l'axe de symétrie de la parabole et en donner une allure :

a. $y = 2x^2 - 1$ **b.** $y = -2x^2 + 6x - 4$
c. $y = (-2x + 1)(-8x - 4)$

17 Tracer les paraboles d'équations :

a. $y = x^2 - 4x + 5$ **b.** $y = -2x^2 + 2x + 1$
c. $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$ **d.** $y = -x^2 + x$

Aide : exercice résolu 1

18 Tracer les paraboles d'équations :

a. $y = \dfrac{x^2}{4} - x - 3$ **b.** $y = -\dfrac{x^2}{2} + 2x + \dfrac{5}{2}$
c. $y = 2(x - 1)^2 + 2$ **d.** $y = -\frac{1}{2}(x + 4)(x - 2)$.

19 Sans développer, donner l'allure des paraboles :

a. $\mathcal{P}_1 : y = x(-x + 4)$ **b.** $\mathcal{P}_2 : y = 2(x - 1)^2 + 4$

20 **Sans calculatrice**

1. Donner une allure possible de la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = -2x^2 - 4x + 8$.

2. Lire graphiquement le nombre de solutions de l'équation $-2x^2 - 4x + 8 = 3$.

21 Soit $g(x) = 3(x - 1)(x + 3)$.

1. Donner l'expression développée de $g(x)$.

2. Donner l'allure de la courbe $\mathcal{P}$ représentant g.

3. Déterminer le point d'intersection de $\mathcal{P}$ et de l'axe des ordonnées.

4. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{P}$ et de l'axe des abscisses.

22 Intersections

Sur la calculatrice, tracer les courbes représentant les fonctions f et g définies par $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 1$ et

$g(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 6$.

a. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.
b. Montrer que l'équation $f(x) = g(x)$ est équivalente à l'équation $(x + 3)(x - 5) = 0$.
c. En déduire les solutions exactes de l'équation $f(x) = g(x)$.

23 Paraboles en famille



Pour tout réel m, on considère la parabole notée $\mathcal{P}_m$ d'équation $y = 2x^2 - 6mx + 12m$.

1. Écrire l'équation de $\mathcal{P}_0$ ($\mathcal{P}_0$ désigne la parabole $\mathcal{P}_m$ obtenue pour $m = 0$) et la tracer sur votre calculatrice.

2. Tracer $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sur le même graphique.

3. Démontrer qu'un même point A appartient à toutes les paraboles $\mathcal{P}_m$.

24 Sans calculatrice

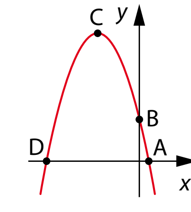
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -(2x - 1)(x + 5)$.

1. Laquelle des courbes tracées ci-dessous peut-elle représenter graphiquement la fonction h ?

2. Déterminer les coordonnées des points A, B, C et D placés sur la figure.

Figure a / Figure b / Figure c





Sens de variation

25 Minimum ou maximum ?

Dire pour chaque fonction si elle admet un minimum ou un maximum et en quelle valeur de x il est atteint.

a. $f(x) = 3x^2 + 4$ b. $h(x) = -2x^2 + 8x - 1$
c. $g(x) = -2(x - 4)^2 + 8$

26 Dresser le tableau de variation de la fonction :

a. $f(x) = x^2 + 4x - 6$ **b.** $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x$
c. $k(x) = (x - 1)(x + 2)$ **d.** $h(x) = 3x^2 - 3$

Aide : exercice résolu 2

27 Soit $f(x) = -2x^2 + 6x - 3$ pour tout x réel.

1. Dresser le tableau de variation de f.

2. Calculer $f(2)$.

3. En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 1$.

4. Tracer la parabole représentant f.

5. Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 1$.

28 Soit I = [– 5 ; 3] et f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 + 6x - 7$.

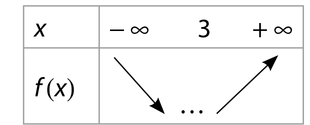
1. Dresser le tableau de variation de f.

2. En déduire le minimum et le maximum de f sur I.

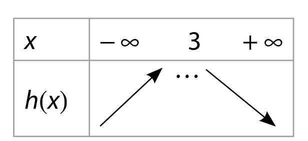
3. Donner les solutions sur I des (in)équations :
a. $f(x) = -10$ **b.** $f(x) = 17$
c. $f(x) < 17$ **d.** $f(x) > -20$

29 Chercher l'intrus

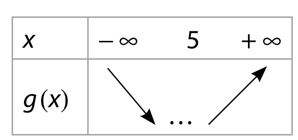
Voici les tableaux de variation de trois fonctions.



x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	↘	…	↗



x	$-\infty$	3	$+\infty$
$h(x)$	↗	…	↘



x	$-\infty$	5	$+\infty$
$g(x)$	↘	…	↗

Retrouver, parmi les expressions suivantes, une expression possible de $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$. Justifier.
a. $5(x - 1)(x - 5)$ **b.** $-x^2 + 6x - 1$
c. $(7 - x)(3 - x)$ **d.** $-(x + 1)^2 + 3$

30 Coefficients du trinôme

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction trinôme dont on connaît le tableau de valeurs suivant :

x	– 4	– 2	0	2	5	8
$f(x)$	13	1	– 15	– 23	– 20	1

Sans calcul, mais en justifiant, donner la valeur de c, le signe de a, puis celui de b.

Forme canonique

31 Mettre sous forme canonique :

a. $2x^2 + 8x - 2$ **b.** $x^2 + 3x + 1$
c. $-x^2 + 2x + 5$ **d.** $3x^2 + x - 4$

Aide : exercice résolu 3

Exercices

32 Mettre sous forme canonique :

a. $x^2 + 4x + 5$ **b.** $3t^2 + 6t - 9$

c. $9a^2 + 18a + 1$ **d.** $2x^2 + x + 1$

Aide : exercice résolu 3

33 Soit $f(x) = -2x^2 + 6x - 1$ pour tout x réel.

1. Mettre $f(x)$ sous forme canonique.

2. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

3. Contrôler graphiquement à la calculatrice.

34 Soit $f(x) = x^2 - 5x + 6$ pour tout x réel.

1. Mettre $f(x)$ sous forme canonique.

2. En déduire une factorisation de $f(x)$.

3. Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$.

4. Contrôler graphiquement à la calculatrice.

Équations du second degré

35 Résoudre les équations suivantes :

a. $2x^2 - 12x + 18 = 0$ **b.** $x^2 - x + 6 = 0$

c. $3x^2 + 4x - 1 = 0$ **d.** $2x^2 - x + 1 = 0$

Aide : exercice résolu 4

36 Déterminer les racines des trinômes suivants :

a. $2x^2 + 3x - 2$ **b.** $3x^2 - 4x + 1$

c. $8x^2 - 2x - 1$ **d.** $\frac{1}{3}x^2 + x - 6$

Aide : exercice résolu 4

37 Déterminer les éventuels points d'intersection des paraboles suivantes avec l'axe des abscisses :

a. $y = x^2 - 4x + 3$ **b.** $y = 3x^2 + 2x + 3$

c. $y = -x^2 - 9x - 20$ **d.** $y = x^2 + 2x$

38 **Avec ou sans discriminant ?**

1. Parmi les équations suivantes, quelles sont celles que l'on peut résoudre sans utiliser le discriminant ?

a. $x^2 + 6x = 0$ **b.** $2x^2 - 2x + 6 = 0$

c. $3x^2 + 4 = 0$ **d.** $x^2 + 2x + 1 = 0$

e. $2x^2 - 8 = 0$ **f.** $(2x - 1)(x + 4) = 0$

g. $3x^2 - 4x = 0$ **h.** $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = 0$

2. Résoudre toutes ces équations.

Aide : exercice résolu 4

39 Résoudre les équations :

a. $x^2 + 5x + 3 = 2x + 3$

b. $(2t + 1)(t - 4) = t^2 - 4t - 6$

c. $(t + 2)^2 = 2t^2 + 5t - 2$

d. $(x + 1)(x + 2) = (x + 3)(x + 4) + (x + 5)(x + 6)$

40 On considère la courbe $\mathscr{P} : y = x^2 + 3x + 3$ et la droite $\mathscr{D} : y = x + 2$.

1. Représenter $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ sur le même graphique.

2. Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $x^2 + 3x + 3 = x + 2$.

3. Résoudre cette équation par le calcul.

41 On considère les courbes $\mathscr{P} : y = x^2 - 4x$ et $\mathscr{P}' : y = 3x^2 + 4x - 2$.

1. À l'aide de votre calculatrice, déterminer graphiquement les solutions éventuelles de l'équation $x^2 - 4x = 3x^2 + 4x - 2$.

2. Calculer les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

42 ALGORITHMIQUE **L'algorithme des racines**

1. Écrire en langage naturel un algorithme qui demande les coefficients d'un trinôme de degré 2 et affiche le discriminant du trinôme.

2. Le modifier pour qu'il annonce le nombre de racines du trinôme et affiche les racines s'il en a.

43 ALGORITHMIQUE  TICE

Programmer l'algorithme écrit à l'exercice **42** sur une calculatrice ou un logiciel.

Factorisation du trinôme

44 Factoriser si possible les trinômes suivants en un produit de deux polynômes de degré 1.

a. $3x^2 - 6x - 9$ **b.** $-x^2 - 12x + 28$

c. $-x^2 + 5x - 10$ **d.** $3x^2 + \sqrt{2}x + 6$

45 Même énoncé que l'exercice **44**.

a. $x^2 - 4x - 1$ **b.** $x^2 - x - 6$

c. $3x^2 + 7x + 2$ **d.** $16x^2 + 24x + 9$

46 **1.** Factoriser, en un produit de trois polynômes de degré 1, le polynôme $P(x) = 4x^3 - 5x^2 - 9x$.

2. Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

47 Soit $f(x) = \frac{-x^2 + 3x + 4}{x + 1}$ pour $x \neq -1$.

1. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f à la calculatrice. Quelle remarque peut-on faire ?

2. Factoriser $-x^2 + 3x + 4$.

3. En déduire une expression simplifiée de $f(x)$. Est-elle valable pour tout réel x ?

Signe du trinôme, inéquations

48 **1.** Dresser les tableaux de signes de :

a. $2x^2 - 5x + 7$ **b.** $-x^2 + 6x + 9$
c. $-4x^2 - 11x + 3$ **d.** $x^2 + 3x + 5$

2. Contrôler graphiquement à la calculatrice.

Aide : exercice résolu 5

49 Déterminer le signe des trinômes :

a. $x^2 - 4$ **b.** $4x^2 - 8$
c. $(x - 2)(x + 3)$ **d.** $-3x^2 + x + 10$

50 **Avec ou sans discriminant**

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $x^2 - 1 < 0$ **b.** $4 - 2x^2 \leqslant 0$
c. $3x^2 + 4x \leqslant 0$ **d.** $x < \frac{1}{x}$

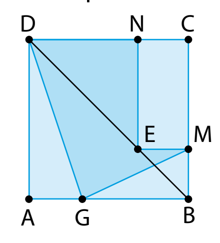
On vérifiera les résultats graphiquement.

51 Résoudre les inéquations suivantes :

a. $\frac{1}{2}x^2 + 3x - 8 > 0$ **b.** $x^2 + 3x - 5 < x + 4$
c. $2(x + 1)^2 - 3x > 2$ **d.** $3x + \frac{1}{2x} \leqslant \frac{5}{2}$

Aide : exercice résolu 6

52 ABCD est un carré de côté 6 cm et E un point de la diagonale [BD]. G est un point de [AB] tel que AG = 2 cm. M et N sont les projetés orthogonaux de E sur [BC] et [CD] On pose EM = x.
Pour quelles valeurs de x l'aire de DNEMG est-elle supérieure à la moitié de celle du carré ?



53 **Position relative de courbes**

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + 5x + \frac{7}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = -x^2 - 3x.$$

1. Résoudre l'inéquation $f(x) > g(x)$.

2. Que peut-on en déduire pour les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$?
Contrôler graphiquement ces résultats.

Aide : exercice résolu 6

54 **Fonction bornée**

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{4x^2 - 5}{x^2 + x + 1}$.

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

2. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) < 5$ et $f(x) > -6$.

3. Quelles valeurs de y_{min} et de y_{max} choisir pour tracer la courbe représentant f sur la calculatrice ?

55 Soit $g(x) = x^3 + 5x^2 - 12x + 6$ sur $\mathbb{R}$.

1. Lire sur la calculatrice le signe de $g(x)$.

2. a. Montrer que 1 est solution de $g(x) = 0$.
b. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $g(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.
c. En déduire le signe de $g(x)$.

56 Soit $f(x) = x + \frac{16}{x}$ pour tout $x > 0$.

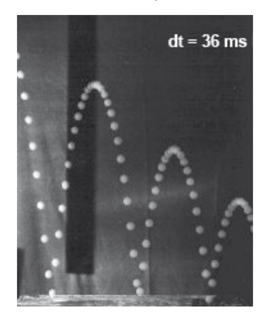
1. Démontrer que, pour tout $x > 0$, $f(x) \geqslant 8$.

2. Quel est le minimum de f sur $]0 ; +\infty[$?

Second degré en situation

57 **Chronophotographie**   

On a réalisé une chronophotographie des rebonds d'une balle avec un intervalle de temps $dt = 36$ ms.



1. Ouvrir le fichier GeoGebra disponible sur le site, dans lequel l'image a été importée.

2. En relevant des coordonnées de points sur le logiciel, donner des équations de paraboles permettant de simuler sur un jeu vidéo la trajectoire d'une balle lors de deux rebonds consécutifs.
On pourra faire les calculs à la main ou avec un logiciel de calcul formel.

3. Tracer cette trajectoire sur GeoGebra.

Point info

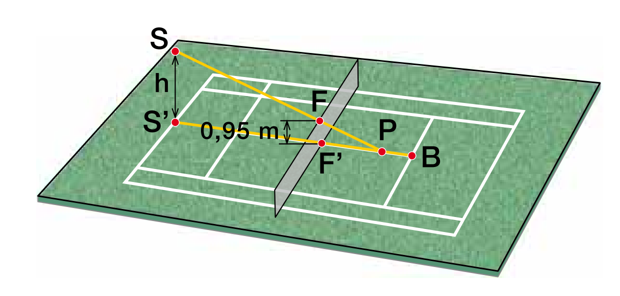
Histoire des arts

Les progrès de la photographie au XIXe siècle offre des possibilités nouvelles. À partir des années 1870, le Français Étienne-Jules Marey (1830-1904) et à sa suite l'Américain Eadweard Muybridge (1830-1904) se servent d'instantanés photographiques pour décomposer le mouvement des êtres vivants. L'analyse de films est toujours utilisée aujourd'hui pour améliorer les gestes et les performances des athlètes (course, prise d'élan, saut, *etc.*).

58 Une entreprise fabrique des pantalons. Pour une quantité q produite, le coût de production, en euros, est $C(q) = 0{,}04q^2 + 40q + 8\,000$.
La recette par pantalon vendu est 25 € et on suppose que toute la production est vendue.
Combien l'entreprise doit-elle fabriquer de pantalons pour être bénéficiaire ?

59 **Le service au tennis**

On modélise de façon simplifiée un service fait par une joueuse située en S', qui frappe la balle en S, perpendiculairement au filet.
La longueur du rectangle de service est F'B = 6,4 m.

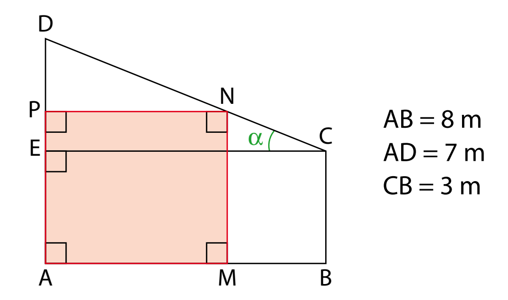


Dans un repère d'origine S', d'axe des abscisses (S'F'), d'axe des ordonnées (S'S) et d'unité 1 m, la trajectoire de la balle est une partie d'une parabole $\mathscr{P}$.
La joueuse frappe la balle avec une vitesse de 163 km.h^{-1} à une hauteur $h = 2{,}67$ m avec un angle α par rapport à l'horizontale.
Dans chacun des deux cas suivants, la balle passe-t-elle au-dessus du filet ?
Si oui, arrive-t-elle dans le rectangle de service ?

a. Si $\alpha = 5°$, $\mathscr{P} : y = 2{,}67 - 0{,}087x - 0{,}0024x^2$.
b. Si $\alpha = 6{,}5°$, $\mathscr{P} : y = 2{,}67 - 0{,}114x - 0{,}0024x^2$.

Source : *Tangente HS n° 19*.

60 On souhaite poser des panneaux solaires sur un toit qui a la forme d'un trapèze rectangle représenté ci-dessous par le quadrilatère ABCD.
Les panneaux solaires occuperaient le rectangle MAPN.



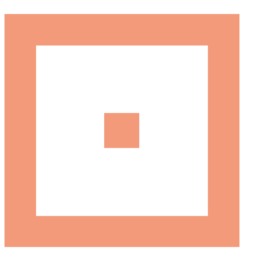
AB = 8 m
AD = 7 m
CB = 3 m

On note h la longueur AP en m et $\mathscr{A}(h)$ l'aire du rectangle MAPN en m^2.

1. Calculer $\tan \alpha$.
2. En déduire que $PN = 14 - 2h$.
3. Exprimer l'aire $\mathscr{A}(h)$ du rectangle MAPN en fonction de h. Préciser l'ensemble de définition de la fonction $\mathscr{A}$.
4. Comment doit-être h pour que $\mathscr{A}(h) \geqslant 24$ m^2 ?
5. Dresser le tableau de variation de $\mathscr{A}$ et donner l'aire maximale de MAPN.

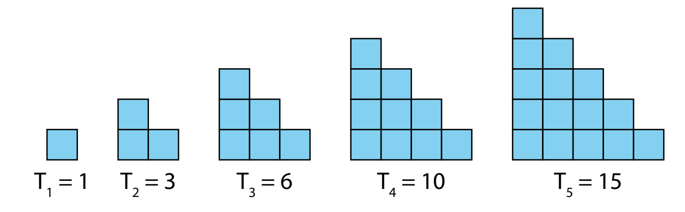
61 **Carrés imbriqués**

Dans un carré de 10 cm de côté, on a colorié une bande de largeur x cm et un carré de côté x centré comme sur la figure ci-contre. Déterminer pour quelles valeurs de x, l'aire de la partie colorée est inférieure à l'aire de la partie blanche.



62 **Nombres triangulaires** @ TICE

Des mathématiciens grecs, à la suite de Pythagore, représentaient géométriquement certains nombres. Ci-dessous sont représentés des nombres appelés nombres triangulaires.



1. Représenter sur le quadrillage de votre feuille le 6e nombre triangulaire T_6. Donner T_6.

2. Conjecture

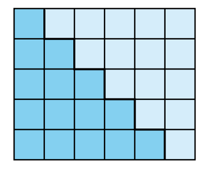
a. Faire afficher le tableur de GeoGebra (menu *Affichage*) et compléter la feuille de calcul.

	A	B
1	n	Tn
2	1	1
3	2	3
4	3	6
5	4	10
6	5	15
7	6	

b. Sélectionner la plage de cellules A2 : B7, puis par un clic droit choisir *Créer une liste de points*.
c. À quel type de courbe ces points semblent-ils appartenir ?

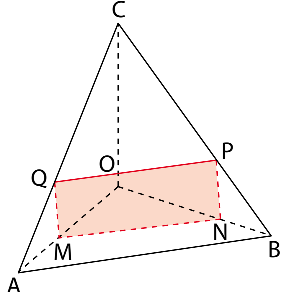
3. On cherche une fonction trinôme de degré 2 dont la courbe passerait par les points placés à la question **2**.
Posons $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.
a. Que doivent valoir $f(1)$, $f(2)$ et $f(3)$?
En déduire trois équations que doivent vérifier a, b et c.
b. En déduire l'expression de $f(x)$.
c. Tester la solution trouvée sur GeoGebra.
d. Quelle formule peut-on conjecturer pour T_n en fonction de n ($n \geqslant 1$) ? En est-on sûr pour tout entier n supérieur ou égal à 1 ?

4. Proposer une démonstration géométrique du résultat précédent à l'aide de la figure ci-contre.



63 On doit partager de manière égale une somme de 30 000 € entre un certain nombres de personnes.
S'il y avait 4 personnes de moins, la part de chacun serait augmentée de 1 250 €. Combien sont-ils ?

64 OABC est un tétraèdre tel que OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles isocèles en O. 
On prendra OA = 4 cm.
Pour tout réel x de $[0 ; 4]$, on place le point M sur [OA] tel que OM = x.
La parallèle à (AB) passant par M coupe [OB] en N ;
les parallèles à (OC) passsant par M et N coupent [CA] et [CB] respectivement en Q et P.



1. a. Faire une figure dans le plan (OAB) puis déterminer MN en fonction de x.

b. Déterminer de même MQ en fonction de x.

2. Exprimer l'aire $\mathscr{A}(x)$ du rectangle MNPQ en fonction de x.

3. Dresser le tableau de variation de la fonction $\mathscr{A}$ et déterminer où placer M pour que cette aire soit maximale.

65 ALGORITHMIQUE  

Une règle d'Adraste (IIe siècle)

On considère un algorithme qui :
– demande un triplet de nombres réels (a, b, c), $a \neq 0$;
– affiche 19 nouveaux triplets de nombres obtenus en remplaçant successivement chaque triplet (a, b, c) par le triplet $(a, a + b, a + 2b + c)$.
Donc (a, b, c) est remplacé par $(a, a + b, a + 2b + c)$.

1. Calculer à la main les 5 premiers triplets donnés par cet algorithme si on entre $(a, b, c) = (2, 3, 5)$.

2. a. Programmer cet algorithme sur un tableur.

b. Représenter graphiquement les 20 points P(b, c) associés aux différents triplets obtenus.

c. À quel type de courbe ces points semblent-ils appartenir ?

3. Un cas particulier : $(a, b, c) = (1, b, b^2)$

a. Donner une équation de la courbe à laquelle semblent appartenir les points placés.

b. Démontrer que si un triplet est de la forme $(1, b, b^2)$, alors son successeur aussi.

c. À quelle courbe appartiennent les 20 points placés ? Justifier la réponse.

Pour aller plus loin

On considère un triplet $(1, b, c)$.

a. Justifier qu'il existe un réel k tel que $c = b^2 + k$.

b. On suppose que $(a, b, c) = (1, b, b^2 + k)$.
Écrire le triplet suivant et démontrer qu'il est de la même forme.

c. À quelle courbe appartiennent les 20 points placés ? Tester quelques exemples sur le tableur.

Un peu de logique

66 Soit le trinôme $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, $c \neq 0$.

1. La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ?
« Si a et c sont de signes opposés, le trinôme a toujours des racines ».

2. Sa réciproque est-elle vraie ou fausse ?

67 **Vrai ou faux ?**

On considère un trinôme $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ et son discriminant Δ.

a. Si $ax^2 + bx + c < 0$ pour tout x réel, alors $\Delta < 0$.

b. Si $\Delta < 0$ alors $ax^2 + bx + c < 0$ pour tout réel x.

68 **Une solution évidente**

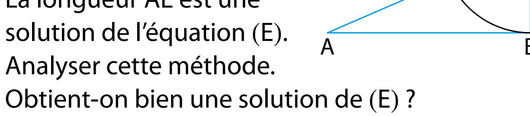
1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que 1 soit solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

2. Déterminer alors la seconde solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ en fonction de a, b et c.

Analyser une production

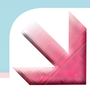
69 **Une solution de Descartes** (**XVIIe siècle**)

Soit p et q deux nombres positifs et l'équation (E) :
$x^2 - px - q^2 = 0$.
Descartes propose la construction géométrique suivante pour trouver les solutions :
– Construire un triangle ABC rectangle en B avec
AB = q et BC = $\frac{p}{2}$.
– Construire le cercle de centre C passant par B. La droite (AC) coupe le cercle en D et E (E $\notin$ [AC]).
La longueur AE est une solution de l'équation (E).
Analyser cette méthode.
Obtient-on bien une solution de (E) ?
Quelle est l'autre solution ?



70 Charles affirme avoir trouvé une solution entière à l'équation $x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{8} = 0$.
Qu'en pensez-vous ?

Travail personnel



QCM Choisir la (ou les) bonne(s) réponse(s)

Réponses page 341

Donner la réponse juste sans utiliser de calculatrice.

71 L'équation $3x^2 + 7x + 4 = 0$

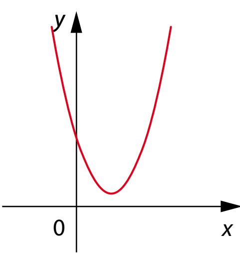
a. admet 2 solutions négatives.

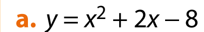
b. admet 1 solution positive.

c. n'admet aucune solution réelle.

d. admet une solution positive, une solution négative.

72 Quelle est une équation possible de la courbe ci-contre :





a. $y = x^2 + 2x - 8$

b. $y = -3x^2 - 4x - 1$

c. $y = 5x^2 - 8x + 4$

d. $y = -2x^2 + x + 3$

73 $-x^2 - 3x + 1$ a pour discriminant :

a. -1 **b.** 5 **c.** 13 **d.** -13

74 L'équation $2{,}5x^2 - 5x + 2 = 0$ a pour solutions :

a. $\dfrac{5+\sqrt{5}}{5}$ et $\dfrac{5-\sqrt{5}}{5}$ **b.** $\dfrac{-5+\sqrt{5}}{5}$ et $\dfrac{-5-\sqrt{5}}{5}$

c. $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$ **d.** autres

75 La forme factorisée de $2x^2 + 6x - 8$ est

a. $2x(x+3) - 8$ **b.** $2\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 - 12{,}5$

c. $2(x+4)(x-1)$ **d.** $(x-4)(x+1)$

76 Soit $f(x) = 5x^2 + 9x + 4$ sur $\mathbb{R}$.

a. $f(x) > 0$ pour tout x réel.

b. $f(x) < 0$ pour tout x réel.

c. $f(x)$ n'est pas de signe constant.

d. $f(x) < 0$ sur $]-\infty\,;0]$.

77 L'inéquation $3x^2 - 6x - 24 \leqslant 0$ a pour ensemble de solutions :

a. $[-2\,;4]$ **b.** $[-1\,;3]$ **c.** $[0\,;5]$ **d.** autre



VRAI / FAUX

Réponses page 341

Sans calculatrice.

78 S(3 ; 1) est le sommet de la parabole d'équation $y = 3x^2 - 9x + 1$.

79 -2 et 3 sont les solutions de l'équation $x^2 - x - 6 = 0$.

80 La fonction $x \mapsto 3x^2 - 8x + 2$ admet un maximum.

81 Le minimum de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 5x + 1$ est 2,5.

82 L'équation $7x^2 + 8x + 9 = 0$ admet deux solutions.

83 Le discriminant du trinôme $3x^2 - 4x + 1$ est -28.

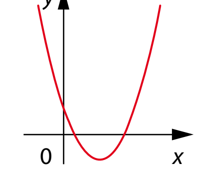
84 Pour tout réel x, $3x^2 - 6x + 4 \geqslant 1$.

85 Pour tout réel x, $5x^2 - 8x + 4 \geqslant 0$.

86 La fonction $f : x \mapsto 3x^2 - 7x + 4$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;\dfrac{7}{2}\right]$.

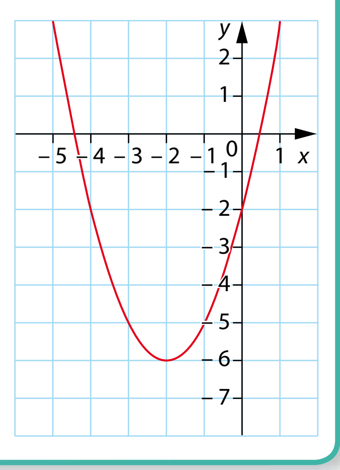
87 Soit g la fonction définie par :
$g(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.
Si $\Delta = 0$, alors 0 est le minimum de la fonction g.

88 L'équation $x^2 + 2x - a^2 = 0$ a toujours deux solutions distinctes.



89 La courbe ci-contre est une allure possible de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto 4x^2 + 5x + 6$.

90 Par lecture graphique, la forme canonique de la fonction trinôme représentée ci-contre est $(x+2)^2 - 6$.



91 L'inéquation $x^2 - 3x + 2 > -x^2 + 4x - 4$ a pour ensemble de solutions $]1{,}5\,;2[$.

Travail personnel



Faire le point sur les méthodes

Des questions souvent rencontrées	Voir	Se tester
Tracer une parabole et déterminer le sens de variation d'une fonction polynôme de degré 2	Exercices 1 et 2	Exercices 18, 27
Mettre une expression du second degré sous forme canonique et sous forme factorisée	Exercice 3	Exercices 33, 44
Résoudre une équation du second degré	Exercice 4	Exercice 41
Déterminer le signe d'un trinôme de degré 2	Exercice 5	Exercice 48
Résoudre une inéquation de degré 2	Exercice 6	Exercice 51



Évaluer ses capacités

Réponses page 341. Résolutions détaillées sur le site 

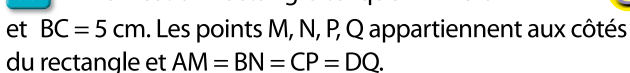
92 **Équations du second degré**

Résoudre les équations suivantes.

a. $5x^2 - 6x - 8 = 0$

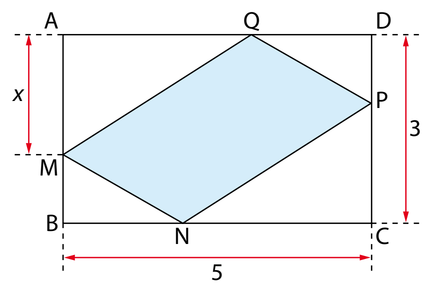
b. $-2x^2 - 3x + 3 = 0$

c. $4x^2 - 5x + 3 = 0$



93 ABCD est un rectangle tel que AB = 3 cm et BC = 5 cm. Les points M, N, P, Q appartiennent aux côtés du rectangle et AM = BN = CP = DQ.

On note x la longueur AM (en cm) et $\mathscr{A}(x)$ l'aire de MNPQ (en cm²).



1. Préciser l'ensemble de définition de $\mathscr{A}$.

2. Démontrer que $\mathscr{A}(x) = 2x^2 - 8x + 15$.

3. Peut-on placer M de telle sorte que

a. MNPQ ait pour aire 9 cm² ?

b. MNPQ ait une aire inférieure à 9 cm² ?

4. Dresser le tableau de variation de $\mathscr{A}$.

5. Quelle est l'aire maximale de MNPQ ?
Et son aire minimale ?

94 **Des expressions à la courbe**

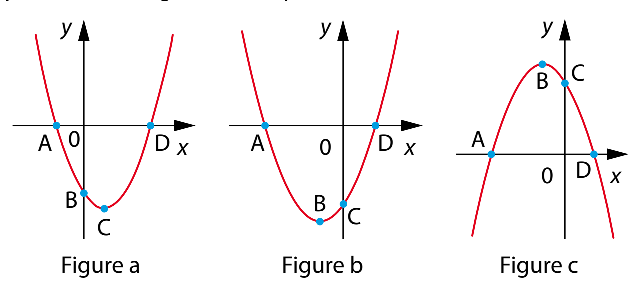
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 5x^2 - 3x - 2$.

1. Factoriser $h(x)$.

2. Donner la forme canonique de $h(x)$.

3. En déduire parmi les graphiques suivants lequel est celui de la représentation graphique de h. Justifier.

4. Donner alors les coordonnées des points remarquables placés sur la figure correspondante.



95 **Contrôler**

$\mathscr{P}$ est une parabole d'équation $y = k(x)$ dont le sommet a pour coordonnés S(– 2 ; – 3).

Fanny trouve deux solutions à l'équation $k(x) = 0$:
$x_1 = -1$ et $x_2 = -5$.

Sa camarade Lucie affirme que c'est impossible. Expliquer.

Approfondissement

96 Un peu de technique

Résoudre les inéquations :

a. $(x^2 - 2x - 3)(x^2 + 2x + 2) < 0$

b. $\dfrac{-2x^2 - 3x + 20}{x - 1} \geqslant 0$

97 Équations bicarrées

On pose $X = x^2$. Exprimer x^4 en fonction de X puis résoudre les équations suivantes :

a. $x^4 - 12x^2 + 27 = 0$ **b.** $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

98 Équations avec changement d'inconnue

1. Résoudre l'équation $2x^2 + 5x + 2 = 0$.

2. En utilisant un changement d'inconnue, en déduire les solutions de l'équation

$$\frac{2}{(x-1)^2} + \frac{5}{x-1} + 2 = 0$$

3. Par une méthode analogue, résoudre l'équation $x + 5\sqrt{x} - 3 = 0$, à l'inconnue $x \geqslant 0$.

99 Les nombres de Sophie Germain



Un nombre premier est un nombre supérieur ou égal à 2 qui a pour seuls diviseurs 1 et lui-même.
Par exemple : 15 n'est pas premier (3 est un diviseur de 15 autre que 1 et 15) ; 7 est premier.
On s'intéresse au problème suivant :
Pour quels entiers naturels n, le nombre $n^4 + n^2 + 1$ est-il un nombre premier ?

1. D'après les copies d'écran ci-dessous, que renvoie la commande **idivis** sur le logiciel Xcas ?



```
1 idivis(12)
  [1,2,4,3,6,12]
```

```
2 idivis(29)
  [1,29]
```

2. a. Donner une liste de 10 nombres de la forme $n^4 + n^2 + 1$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$).

b. Tester s'ils sont premiers à l'aide du logiciel.

3. Factoriser $n^4 + n^2 + 1$ à l'aide du logiciel.

4. Résoudre les équations $x^2 + x + 1 = 1$ et $x^2 - x + 1 = 1$.

5. Pour quelles valeurs de n, l'entier $n^4 + n^2 + 1$ est-il un nombre premier ?

Point histoire

Le résultat de l'exercice **99** a été obtenu (sans logiciel de calcul formel !) par Sophie Germain (1776-1831). Chercher qui était Sophie Germain.

100 Une définition géométrique



TICE

1. Que signifie la distance d'un point à une droite ?

2. Expérimentation avec un logiciel de géométrie

a. Tracer une droite d horizontale et placer un point F qui n'appartient pas à d.

b. Placer un point A sur la droite d. Construire le point M à égale distance de F et de A tel que (AM) soit perpendiculaire à d.

c. En activant la trace du point M et en déplaçant le point A, émettre une conjecture sur l'ensemble P des points équidistants de F et de d.

3. Détermination analytique

a. Placer un repère (O, I, J) orthonormé tel que (OI) soit confondu avec d et (OJ) avec (OF).

b. On note $M(x\,;y)$ et $F(0\,;a)$. Exprimer la distance MF et la distance de M à la droite d en fonction de x, y et a.

c. Déterminer une équation de l'ensemble P.

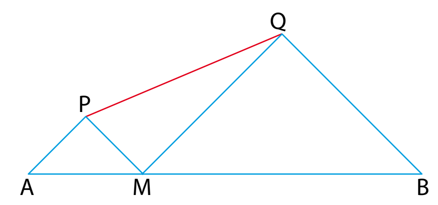
d. Construire P sur la figure.



101 Longueur variable




[AB] est un segment de longueur 4 cm. Pour chaque point M de [AB], on construit la figure ci-dessous dans laquelle APM et BQM sont des triangles rectangles et isocèles.
On considère que si M est en A, P l'est aussi et que si M est en B, Q aussi.



Une longueur ℓ étant donnée (ℓ en cm), on cherche si on peut placer M de telle sorte que $PQ = \ell$.
On note $AM = x$ $(0 \leqslant x \leqslant 4)$.

1. Faire la figure sur un logiciel de géométrie et émettre une conjecture sur les longueurs ℓ possibles.

2. a. Démontrer que PQM est rectangle en M.

b. En déduire que $PQ^2 = x^2 - 4x + 8$.

3. a. Dresser le tableau de variation de la fonction qui à x associe PQ^2 sur $[0\,;4]$.

b. En déduire un encadrement de PQ^2 puis de PQ.

c. Montrer que si $\ell \notin [2\,;2\sqrt{2}]$, il n'existe pas de point M tel que $PQ = \ell$.

4. Soit I le point d'intersection des droites (AP) et (BQ). Démontrer que :

a. I ne dépend pas de la position du point M.

b. $IM = \ell$.

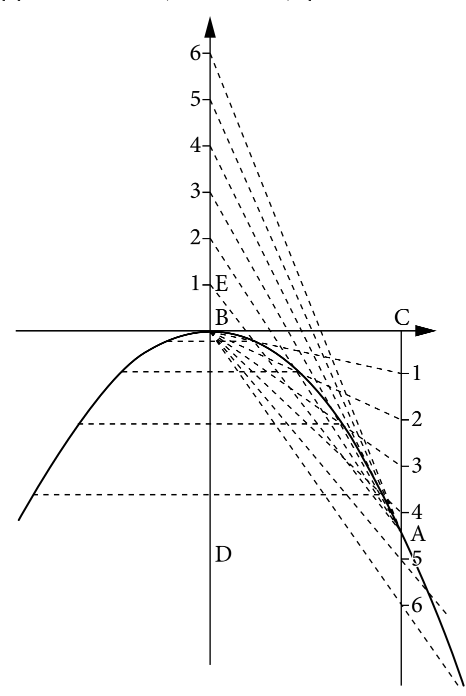
5. a. En déduire une construction géométrique d'un point M à la règle et au compas et montrer qu'elle est possible pour tout ℓ de $[2\,;2\sqrt{2}]$.

b. Effectuer cette construction sur papier pour $\ell = 3$.

102 Histoire

TICE

La figure ci-dessous illustre le traité *Sectiones conicae* de Philippe de la Hire (1640-1718), paru en 1685.

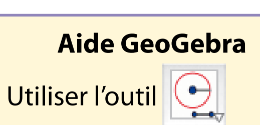


1. Sur un logiciel de géométrie

a. Créer les points B(0 ; 0), I(1 ; 0) et J(0 ; 1).

b. Créer un point A du plan hors des axes du repère comme sur la figure et le point C de l'axe (OI) tel que (AC) soit perpendiculaire à cet axe.

c. Créer un point M de la demi-droite [CA] et le point N de la demi-droite [BJ] tel que BN = CM.

Aide GeoGebra
Utiliser l'outil 

d. Créer le point d'intersection P de (AN) et (BM). Activer la trace de ce point et observer la courbe qu'il décrit quand M décrit [CA].

2. Démonstration dans un cas particulier

On prend A(4 ; – 2) et M(4 ; – t), $t > 0$.

a. Déterminer une équation de (BM) et une équation de la droite (AN).

b. Démontrer que les coordonnées de P sont $\left(2t\,;-\dfrac{t^2}{2}\right)$.

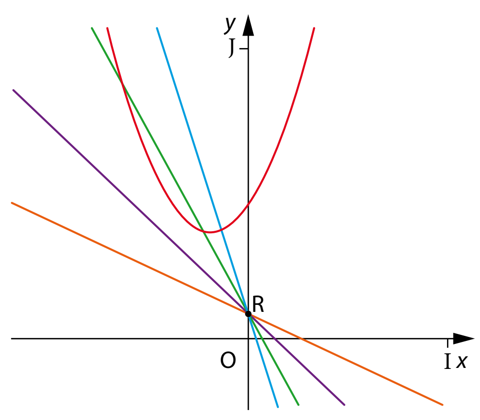
c. Exprimer t en fonction de l'abscisse x_P de P puis en déduire que P appartient à une parabole Γ dont on donnera l'équation.
Contrôler en traçant Γ sur le logiciel.

d. Quand t décrit $]0\,;+\infty[$, quelle partie de la parabole le point P décrit-il ?

e. Quelle construction de l'autre partie de la parabole suggère la figure de Philippe de la Hire ?

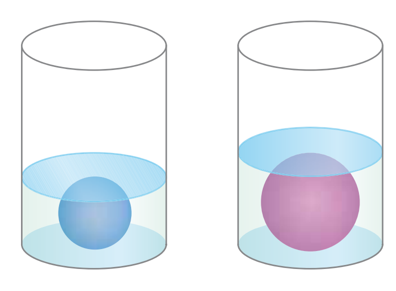
103 Faisceau de droites

Dans le repère (O, I, J) orthogonal, on considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2 + 3x + 11$ et le point R(0 ; 2). Quelles sont les valeurs de m pour lesquelles la droite de coefficient directeur m passant par le point R coupe la parabole ?



104 Est-ce possible ?

On considère un récipient cylindrique de rayon intérieur 10 cm et de hauteur intérieure 22 cm.
On place une boule de rayon 5 cm au fond du récipient puis on verse de l'eau jusqu'à recouvrir exactement la boule (cette boule, étant de densité plus grande que l'eau, ne flotte pas).
On enlève cette boule et on la remplace par une seconde boule de même densité et de rayon différent ; l'eau recouvre à nouveau exactement la seconde boule.
On se demande quel est le rayon r de cette boule.



1. Quel est le rayon maximal r que l'on peut choisir ?

2. a. Quel est le volume d'eau contenu dans le récipient lors de la première expérience ?

b. Exprimer le volume d'eau $V(r)$ contenu dans le récipient lors de la seconde expérience.

3. a. Écrire une équation dont r est solution.

b. Montrer qu'elle est équivalente à une équation de la forme $(r-5)\,(ar^2 + br + c) = 0$ où a, b et c sont à déterminer.

c. Conclure.

Prendre des initiatives

Ne pas hésiter à utiliser calculatrices ou logiciels pour résoudre ces problèmes.

105 PROBLÈME OUVERT

Le triangle de côtés 3, 4 et 6 n'est pas rectangle. Peut-on, en ajoutant une même longueur à chacun de ses côtés, obtenir un triangle rectangle ?

106 **Vrai ou faux ?**

a. La somme de deux trinômes de degré 2 est un trinôme de degré 2.

b. Un trinôme du second degré peut toujours s'écrire comme la somme de deux trinômes du second degré.

107 PROBLÈME OUVERT

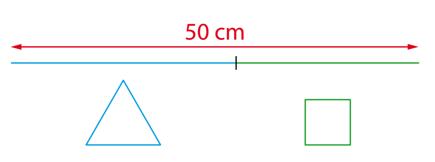
Quelle somme minimale peut-on obtenir quand on ajoute un nombre strictement positif et son inverse ?

108 PROBLÈME OUVERT

Les trois longueurs d'un triangle ABC sont $AB = 2x - 1$; $BC = 3x - 2$ et $CA = 4x - 3$, où x est un réel.
Déterminer la (ou les) valeur(s) de x, telle(s) que le triangle ABC est rectangle.

109 PROBLÈME OUVERT

On dispose d'un fil métallique de longueur 50 cm. On le partage en deux parties.



Avec l'une on fabrique un triangle équilatéral, et avec l'autre un carré.
Est-il possible que le triangle ait un périmètre plus petit que le carré mais une aire plus grande ?

110 PROBLÈME OUVERT

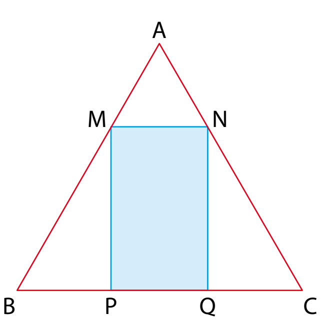
Les singes de Bhāskara (XIIe siècle)

« La cinquième partie de la troupe, moins 3, élevée au carré, était allée dans une caverne et un singe était en vue grimpé sur une branche.
Dis combien ils étaient ? »

Source : *Mathématiques au fil des âges*, éd. Gauthier-Villars.

111 PROBLÈME OUVERT

ABC est un triangle équilatéral de côté a, $a > 0$.
On place M, N, P, Q sur les côtés comme sur la figure de telle sorte que MNPQ soit un rectangle.
Où placer M, N, P et Q pour que le rectangle MNPQ ait une aire maximale ?



112 **Somme d'entiers**

1. Déterminer un polynôme P de degré 2 tel que :
$P(x + 1) - P(x) = 2x$ et $P(0) = 0$.

2. En déduire la somme des n premiers nombres entiers pairs non nuls : $S = 2 + 4 + \ldots + 2n$.

3. En déduire la somme des n premiers nombres entiers non nuls.

English Corner

113 **1.** Write each quadratic expression in completed square form.

a. $2x^2 + 4x - 2$ **b.** $-x^2 + 5x + 1$ **c.** $6 - 2x + x^2$

2. For each quadratic expression $f(x)$ above consider the graph $y = f(x)$. Write down the coordinates of its maximum/minimum point.

3. For each quadratic expression $f(x)$ above solve the equation $f(x) = 0$.

114 A function is defined as $f(x) = -x^3 + 7x^2 - 10x$.
Factorize $f(x)$ completely. Decide which of the graphs below is a sketch of $y = -x^3 + 7x^2 - 10x$.

